CONCOURS COMMUN I.N.A. & E.N.S.A. 1983

MATHÉMATIQUES

TB' TD'

Durée : 3 heures

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

Partie I

1° On considère l'équation du troisième degré dans $\mathbb{C}$:

$$(\mathrm{E}) : r^3 - 1 = 0$$

a. Vérifier que 1 est solution de (E);

b. Montrer que les deux racines de (E) différentes de 1 sont solution de (E') : $r^2 + r + 1 = 0$.

Résoudre (E');

c. On note j (respectivement $\bar{j}$) la racine de (E') de partie imaginaire positive (respectivement négative). Trouver le module et l'argument de j et $\bar{j}$.

2° Montrer les relations suivantes :

a. $j^2 = \bar{j}$

b. $1 + j + j^2 = 0$

c. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad j^{3n} = 1, \quad j^{3n+1} = j, \quad j^{3n+2} = j^2.$

.../...

3° Dans $\mathbb{C}$, on considère le système linéaire à trois équations et trois inconnues α, β, γ :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + j\beta + j^2\gamma = 0 \\ \alpha + j^2\beta + j\gamma = 0 \end{cases}$$

Montrer que ce système a une solution unique et trouver cette solution.

Partie II

On veut résoudre le problème (P) suivant :

(P) Quelles sont toutes les suites de nombres complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = u_n .$$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites de nombres complexes.

On définit la somme de deux éléments $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}$ par :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Le produit d'un élément $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}$ par un nombre complexe λ est défini par : $\lambda\,(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda\, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1° Montrer que $\mathcal{E}$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$.

2° Soit $\mathcal{F}$ la partie de $\mathcal{E}$ définie par :

$$\mathcal{F} = \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E} \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+3} = u_n \}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

3° Montrer que la partie de $\mathcal{E}$ formée des trois suites :

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

définies par $\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n = 1, \ y_n = j^n, \ z_n = j^{2n}$

est une partie libre de $\mathcal{F}$. [On pourra utiliser la question I. 3°].

4° Montrer que l'application Φ de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{C}^3$ définie par :

$$\Phi\,[(u_n)_{n \in \mathbb{N}}] = (u_0, u_1, u_2) \quad \in \mathbb{C}^3$$

est une application linéaire et bijective.

Quelle est la dimension de $\mathcal{F}$?

5° A partir des questions II. 3° et II. 4°, trouver une base de $\mathcal{F}$ et en déduire la solution générale de (P).

Partie III

Si $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ est une 3×3 matrice complexe quelconque, on rappelle que le déterminant de M vaut :

$$\det M = (V_1 \wedge V_2) \cdot V_3$$

où $V_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$

sont les vecteurs colonne de M et où $\wedge$ (respectivement.) désigne le produit vectoriel (respectivement scalaire) dans $\mathbb{C}^3$.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1° Soit $r \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(A - r\,I)$.

2° Déduire de ce résultat que si $r = 1$, j ou j^2, les vecteurs colonne de la matrice $A - r\,I$ ne sont pas linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^3$.

3° En déduire que si $r = 1$, j ou j^2, le sous-espace vectoriel I_r de $\mathbb{C}^3$ défini par :

$$I_r = \left\{ V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \text{ tels que } \exists\, W = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \text{ vérifiant } (A - r\,I)\,W = V \right\}$$

est de dimension inférieure ou égale à 2.

FIN

196